

音階にひそむ数理

西山豊

小さい頃から数学と音楽が好きだった。ところが音楽は高校1年の授業を最後に学問の対象からはずれ趣味になってしまった。最近、あることをきっかけに音楽について調べることになった。

音の三要素は音の高さ、音の大きさ、音色でサイン波では波長、振幅、波形に対応するが、音色についての知識は中学生で止まっていた。たとえばドの音を鳴らすとしてもバイオリンとフルートでは音色が異なる。その理由は、ほとんどの楽器は倍音が同時に鳴っていてそれが重なった結果が音色になる。この考えを応用して音を合成するのがシンセサイザーである。

音楽は音階とリズムが大きな要素であるが、とくに音階は数学と関係深いことが知られている。音階はドレミファソラシドの7音階で表わされる。自然の音には音階というものはなくアナログ的なものであるが、7音階はそれを強制的にデジタル化した人工的な音階である。低いドと高いドの間を1オクターブと言ひ、1オクターブは5つの全音と2つの半音の7つの音に分けられている。半音の位置はミとファ、シとドの間である。

ではなぜ7音階なのだろうか。実は7音階と見るのではなく、1オクターブを半音が12個あると考えるとよい。全音を2つの半音として計算すると $2 \times 5 + 1 \times 2 = 12$ になる。7音階は古代ギリシャを起源とするが、古代中国でも三分損益法として確立している。

西洋音楽が導入されるまで日本は5音階が主流であった。日本の民謡や琉球民謡は5音階でできている。7音階(12律)は偶数と奇数の文化の融合とも思えるし、5音階は人間の指が5本であることに関係しているようだ。西洋の7音階と日本の5音階を

融合させたものに「ヨナ抜き音階」というのがある。7音階の中で第4音(ファ)と第7音(シ)を抜いたドレミソラドの5音階を用いたもので、日本の演歌や歌謡曲に多用され、「北国の春」や「昴」などがそれにあたる。

音楽を専攻しなかった人にとって、全音は半音の2倍であり、全音はすべて同じだと思っているのではないだろうか。確かに平均律という音階は、すべての全音すべての半音は等しい。平均律の考え方は、1オクターブを12等分する。音程は音と音の振動数比であるから等比数列として表される。1オクターブが音程の2倍になるから、2の12乗根が半音の音程となる。たとえば、ドとソの差は平均律でいくと、7個の半音であるから $(\sqrt[12]{2})^7$ であり、この値は1.498となる。

この考え方はシンプルで分かりやすいが、音は弦や管の長さに関係するから、すべての音階の振動数比は整数比でなければ共鳴しない。古代ギリシャにはピタゴラス律というものがあり、ピタゴラス律ではドとソは完全5度として $\frac{3}{2}$ の整数比で表され、その値は1.5である。ピタゴラス律から平均律への移行には有理数から無理数への数学の発展を待たねばならなかったが、和音や共鳴を考えると、やはり音程は整数比であるべきで、ピタゴラス律を改良した純正律などがある。

また、小さい頃からの疑問のひとつに長調と短調がある。ドレミファソラシドのドから始めるとハ長調になり、ラから始めるとイ短調になる。同じ音階なのに始める位置を変えるだけで曲のイメージがずいぶん異なるのはどうしてなのだろうか。おそらく半音の位置が大きく関係しているのだろう。この理由はいつか解き明かしてみたい。

(にしやまゆたか/大阪経済大学)